



**Технически Университет - София**

Катедра “Инженерна логистика,  
подемно-транспортна и строителна техника”

## **Пространствени опашки**

(изследователски проект)

*инж.* Тодор Тодоров  
гр.252 ИЛ, № M05000670

Ръководител:

*доц. д-р инж.* Марин Георгиев

## Съдържание

Съдържание.....	2
Въведение.....	3
Постановка на пространствена опашка.....	5
Употреба на модела M/G/1.....	7
Модел с две обслужващи устройства, без места за чакане.....	10
Ограничения върху времената на обслужване и поведението на опашката.....	10
Общ модел.....	11
Пример: Нехомогенен правоъгълен град.....	17
Оптимално разделяне.....	21
Местоположение на депото.....	22
Диаграма на Вороной.....	31
Пример за приложение: Най-голяма празна окръжност.....	33
Модел PH/PH/1.....	34
Заклучение.....	37
Забележка.....	37
Използвана литература.....	38
Литература свързана с въпроса.....	38
Полезни връзки / допълнителни източници.....	38

## Въведение

В средата на XVIII-ти век в следствие на бурно развиващи се процеси, светът започва да придобива нов облик. Зародилата се в Англия индустриална революция бързо се разпространява в страните в западна и централна Европа, и през втората половина на XIX-ти век вече всичко е различно: Производството почти изцяло е пренесено в големите нови заводи, които осигуряват не само евтини и качествени стоки, но и хиляди работни места за нарастналото население. Градовете вече побират не хиляди, а милиони хора. Още през 1890 г. градското население на Великобритания достига 72% от общия брой на населението. Само за периода от 1881 до 1906 г. Лондон нараства от 3.3 на 4.5 милиона души, Ню Йорк – от 1.2 на 4 млн., Берлин – от 1.1 на 2 млн., Токио – от 0.9 на 1.9 милиона. Променя се обликът на големите градове – в тях се благоустрояват сградите, прокарва се модерна канализация, в обществения транспорт се използват трамваи и автобуси, в Париж и Лондон е построено метро. Успехите в медицината, подобряването на санитарните условия в големите градове, както и на личната хигиена водят до увеличаване на продължителността на човешкия живот. Ако през 1850 г. в Европа живеят 265 млн. души, то през 1914 г. броят им е 452 милиона. Техните нужди от всякакъв вид са се увеличили многократно по количество, а изискванията им към качеството на обслужване непрекъснато нараства, дори и днес. Това поставя нови предизвикателства към планирането и организацията на градовете, и поставя все по-трудни за изпълнение норми във всички сфери на услугите.

Новите задачи изискват нови средства. Едно от тези средства е инструментът *Системи за масово обслужване (СМО)* по-познат като *Теория на опашките*. Както подсказва и името, тази теория изследва взаимоотношенията между клиент и сървър (от англ. *serve* – обслужвам) в една система която позволява при необходимост клиентите да изчакват своя ред образувайки опашка пред сървъра.

Друг инструмент на логистиката е методът представен за първи път от Карл Адам Петри през 1962, наричан днес *мрежи на Петри*. Чрез него могат да се моделират сложни системи в които протичащите процеси са паралелни, и за които СМО води до сложни и/или с недостатъчна точност резултати.

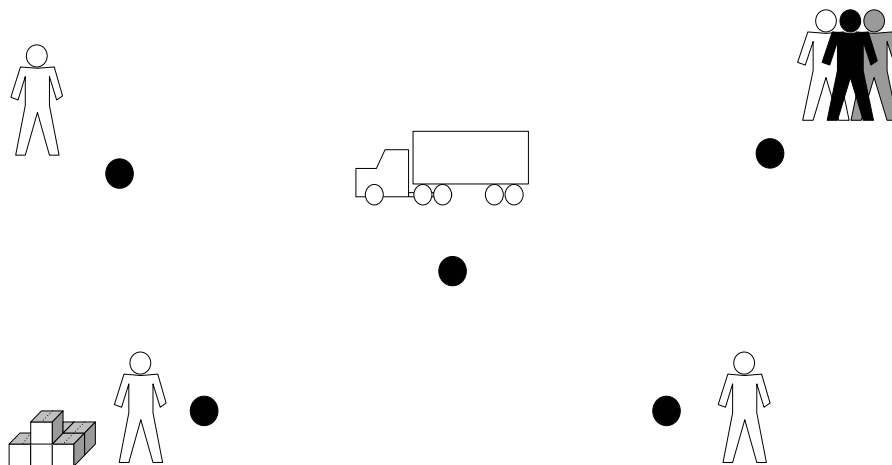
Тези и други инструменти обаче спомагат за решаването на определени видове задачи, и още преди средата на XX-ти век е ясно, че съществуват и такива задачи за които никои от познатите методи не могат да намерят решение. Извеждането на евристични методи за тях е неминуемо, тъй като решението е необходимо, независимо дали то е елегантно или не.

В настоящото проучване са разгледани някои задачи за пространствени опашки решавани през последните 50 години. Всички те са формулирани основно от проблеми на градските условия, където в рамките на града пространството е гъсто населено и на практика във всяка точка на града може да се появи необходимост от обслужване. Сървърите в този смисъл се явяват пожарникарски коли, линейки, полицейски и охранителни патрули и пр. Също са посочени и инструменти за анализ на задачи или подзадачи наподобяващи процесите на търсене на решение като цяло, или като някаква част от конкретната задача.

## Постановка на пространствена опашка

Пример за задача която все още няма аналитично решение е познатата *задача за търговския пътник*. Един от методите за нейното решение, който се използва и днес, е т.нар. *brute-force method* (англ. *метод на грубата сила*) който се състои в генерирането на всички възможни решения и изборът на най-благоприятното от тях. Методът е със сложност  $O(n!)$  и неговото прилагане на практика е възможно само благодарение на мощта на съвременната изчислителна техника.

Изобщо към задачите за маршрутизация и планиране на турове все още се подхожда с частни концепции за оптималност, които често се определят ден за ден, в зависимост от текущите поставени цели. Границите на секторите при клъстеризация също не се определят еднозначно.



Фигура 1

Изброените видове задачи сформират една група, която грубо би могла да се обобщи до една и съща опитна постановка показана на Фигура 1. Условиата в нея са следните:

- сървърът е подвижен
- клиентите са неподвижни

Така поставени, условията в никой случай не забраняват решаването на каквато и да била по-нататъчна формулировка чрез СМО или мрежи на Петри. Единственото реално ограничение е очевидната невъзможност на клиентите да

образуват опашка пред сървъра. Вместо това, клиентите информират сървъра за своята заявка, който от своя страна определя реда на тяхното обслужване.

Редът на обслужване може да зависи от множество различни параметри, зависещи от конкретната задача, но във всички случаи към тези параметри спада и местоположението на съответния клиент. Независимо дали в задачата се изисква минимизиране на времето за обслужване (било то общото или средното за клиент), търси се максимална площ на действие на сървъра или се иска отказите от заявка да се сведат до минимум, местоположението на клиентите играе ключова роля в процеса на тяхното обслужване по две причини:

- 1) Както и при друга постановка на задачата, разстоянието което трябва да се преодолее се определя от местоположенията на сървъра и клиента.
- 2) Разстоянието до произволен клиент влияе силно върху времето за обслужване на всички клиенти, тъй като разстоянието от сървъра до тях ще се изменя.

Тази зависимост на реда на обслужване от местоположението дава идея за разглеждане на множеството от клиентите като една опашка разгърната в пространството. В чисто математически смисъл, заявките могат да се опишат с вероятност на възникване, като пространството бъде разделено на области в които тази вероятност е различна. Така формулирани задачи са познати в литературата като *пространствени опашки (spatial queues)*.

Задачите за пространствени опашки са различни по тип, като ги обединяват главно условията за подвижност. Повечето задачи разглеждат системи с повече от един сървър, и изследват функционалните зависимости между самите сървъри. Задачите с един сървър, включително задачата за търговския пътник, се явяват частен случай на пространствени опашки.

В следващите две точки са показани основните разсъждения за решаването на модели описващи пространствени опашки. Това са модел с един сървър, посочващ различията при подвижни и неподвижни клиенти, и модел с два сървъра указващ новите релации настъпващи в системата – зависимост от работата на единия сървър от другия.

## Употреба на модела M/G/1

Може би най-простият вид на система с пространствени опашки е системата с един сървър. В него заявките за обслужване са разпределени в *региона на обслужване* според особеностите на географската област. Обслужващото устройство може се намира на фиксирана позиция когато не е зает, или може да бъде подвижен (например патрулираща полицейска кола). Сървърът се изпраща към клиент когато възникне заявка, а наредените на опашка заявки се обслужват според някаква дисциплина на опашката (например FIFO). Времето за обслужване се състои от времето за движение до позицията на клиента, време за обслужване на това местоположение (първи етап), и евентуално допълнително време за обслужване не на същото място (втори етап).

Този вид система често може да бъде моделиран точно прилагайки *M/G/1* модел. Все пак, понякога теоретичния модел не дава точно описание заради допускането на независими, еднакво разпределени времена за обслужване. В частност, за обслужване което предполага само обслужване на позицията на клиента (без втори етап на обслужване) времето за обслужване на първия клиент в зает период (в който заявките образуват опашка), може да бъде различно от времената за обслужване на останалите клиенти.

Това може да се наблюдава при следния пример. Нека когато обслужващото устройство не е заето, да пребивава в депо на определено местоположение. При изпращането му за обслужване на заявка, общото време на обслужване, като случайна променлива, е сума от времето за движение от депото до мястото на клиента и времето за обслужване (само първи етап). През времетраене на обслужването може да възникне втора заявка, чието обслужване да започне веднага след приключване на първата. (Допуска се, че вероятността заявката да възникне по време на обратното пътуване на обслужващото устройство към депото е незначителна). В този случай общото време за обслужване отново ще бъде сума от две променливи - движението между две случайни позиции плюс времето за самото обслужване. Тъй като променливата на движението ще бъде различна от тази при първото обслужване, от там и общото време ще бъде различно. Допускайки FIFO дисциплина на опашката, което и да е обслужване от един период на заетост ще има разпределение на времето за

обслужване както това на втория клиент. Възниква малка зависимост от факта, че времето на обслужване на даден клиент се измерва от същата географска позиция в която е приключило обслужването на предишния клиент. Все пак примерите показват, че тази зависимост обикновено е достатъчно малка и може да бъде пренебрегната.

В ситуации като описаната по-горе моделът  $M/G/1$  “почти става”, с изключението че първото време на обслужване в период на заетост е различно от това на останалите времена. Одони е анализирал в детайли такава модифицирана  $M/G/1$  опашка, и използвайки методи на трансформация е развил изрази за математическото очакване на броя заявки в опашката и очакваното време за чакане [6]. Обобщените резултати са дадени по-долу.

Приети са следните означения:

- $\bar{S}_1, \sigma_{S_1}^2$       Респективно, очаквана стойност и отклонение на първото време за обслужване в период на заетост.
- $\bar{S}_2, \sigma_{S_2}^2$       Респективно, очаквана стойност и отклонение на второто и всяко следващо време за обслужване в период на заетост.
- $\lambda$                 Интензивност на потока от заявки

Необходимо е, за да съществува стационарен процес:

$$\lambda \cdot \bar{S}_2 < 1$$

С това условие, се получава



$$\rho = 1 - P_0 = \text{Частта от времето в която сървърът е зает}$$

$$= \frac{\lambda \bar{S}_1}{1 - \lambda(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)}$$

$$L = \rho + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)} \left[ \frac{\sigma_{s_1}^2 + \bar{S}_1^2 + \lambda[\bar{S}_1(\sigma_{s_1}^2 + \bar{S}_2^2) - \bar{S}_2(\sigma_{s_1}^2 + \bar{S}_1^2)]}{2(1 - \lambda\bar{S}_2)} \right]$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W_q = W - \text{Очаквано време за обслужване на произволен клиент}$$

$$= W - (P_0 \bar{S}_1 + (1 - P_0) \bar{S}_2) = W - \frac{\bar{S}_1}{1 - \lambda(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)}$$

$$L_q = \lambda W_q$$

В сравнение със стандартната  $M/G/1$  опашка, тези резултати показват че за така модифицираната  $M/G/1$  опашка, математическото очакване за време на чакане и това за броя заявки в опашката зависят от двете разпределения само чрез техните очаквания и отклонения. Ако тези две очаквания ( $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$ ) и съответните им отклонения са равни, в резултат системата се редуцира до стандартна  $M/G/1$ .

Не е трудно да се поставят допълнителни модификации към поведението на опашката така че да се получи на практика трудно обработваем модел. Например, решението за опашката не е известно за случай на дисциплина “изпрати до най-близкия чакащ клиент”, понеже последователните времена на обслужване не са независими.

## Модел с две обслужващи устройства, без места за чакане

Както и при модела с един сървър, могат да бъдат получени аналитични резултати за модел с два сървъра в пространствено разпределена опашка. Кое е по-важно, двусървърния модел е най-простият който съдържа кооперативно взаимодействие (разделяне на натоварването) между сървърите. Този тип взаимодействие се обобщава до  $N$  сървъра чрез hypercube модел.

Двусървърният модел който е разгледан в тази точка за първи път е бил анализиран през 1972 от Картър, Чайкен и Игнал [3], както и от Ларсън и Стивънсън [4].

### **Ограничения върху времената на обслужване и поведението на опашката**

При пристъпване от 1 до 2 до  $N$  сървъра, ограниченията които трябва да се поставят стават все по-строги. В този модел  $N=2$  се допуска, че двете обслужващи устройства имат едно и също произволно разпределение на времето за обслужване с математическо очакване  $1/\mu$ . Последователните времена на обслужване трябва да представляват независими извадки от това разпределение, независими от историята на системата, нейното текущо състояние, идентификационния номер (1 или 2) на обслужващото устройство или местоположението на клиента. Така, за разлика от  $M/G/1$  модела и неговата модификация разгледана по-горе, моделът  $N=2$ , не може явно да включва отклоненията на времената за обслужване дължащи се на разсейването на тези параметри – местоположение на клиента, специфичност на сървъра и пр.

Това съвсем не означава, че времето за пътуване трябва да се игнорира във времето за обслужване. Напротив, математическото очакване на времето за обслужване може да бъде заложено като сумата на праметното очаквано време за пътуване (според анализа), времето за обслужване първи етап – на мястото от която е отправена заявката, и всички времена от втори етап – допълнително обслужване на друго място. След анализа, очакваното време за пътуване се измерва с компютърен модел. Ако има несъответствие между очакваното и измереното времена, измереното време се използва за подобрене на аналитичния

параметър и анализът се повтаря отново, с подобреното очаквано време за обслужване. Тази итеративна процедура, наричана *настройване на времето за обслужване* (*mean service-time calibration*), обикновено дава резултат доста бързо (до една-две итерации). След настройването, предположеното в изчисленията математическо очакване на времето за обслужване се припокрива с това получено от компютърния модел. По-нататък ще приемаме, че тази настройка е направена.

Един допълнителен недостатък при произволното разпределение на времето за обслужване е, че *не се позволява формирането на опашка*. Това означава, че клиентите които се появяват при заетост и на двата сървъра не се обслужват от  $N=2$  системата. Предполага се, че в реалността те се прихващат от резервна поддържаща система (както полицията прихваща заявки за спешно медицинско обслужване). При необходимост от образуване на опашки с произволна дължина, трябва да се ограничи допускането за произволно разпределение на времето за обслужване до изискване то да бъде отрицателно-експоненциално. Това е пример как една наглед проста модификация на поведението на опашката може значително да промени леснотата/трудността на анализа.

## Общ модел

Нека е даден регион  $B$  обслужван от две обслужващи устройства - ОУ 1 и ОУ 2. Всяко ОУ което не е заето с обслужване, пребивава в база (депо) с фиксирано местоположение. Системата функционира по следния начин:

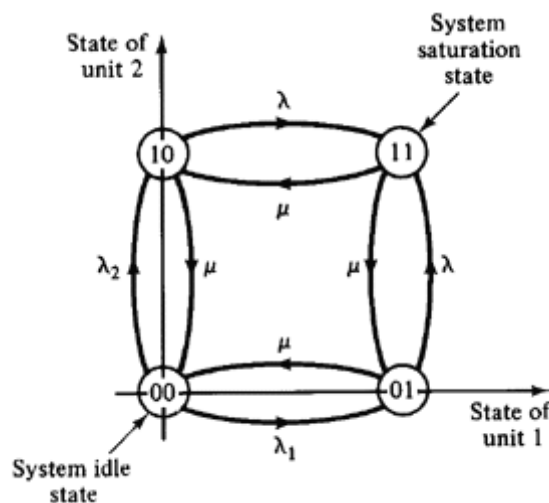
1. Ако  $X$  е произволно подмножество на  $B$ , се счита, че заявките за обслужване в  $X$  се появяват като поасонов поток с интензивност  $\lambda(X)$ , като заявките в кои да са две непресичащи се подмножества са независими.
2. Регионът е разделен на две главни зони, първата обхваща множеството  $A$ , а втората множеството  $B-A$ . Заявките от зона 1 се появяват с интензивност  $\lambda(A) \equiv \lambda_1$ , а от зона 2 с интензивност  $\lambda(B - A) \equiv \lambda_2$ . Като общата интензивност е  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .
3. Ако в зона  $n$  се появи заявка когато и двете ОУ са свободни, тя се обслужва от обслужващо устройство  $n$ , като  $n = 1, 2$ .

4. Ако в зона зона  $n$  се появи заявка когато точно едно ОУ е свободно, тя се обслужва от това свободно ОУ, като  $n = 1, 2$ .
5. Ако в зона зона  $n$  се появи заявка когато и двете ОУ са заети, заявката се изгубва. Както по-рано беше отбелязано, това приемане обикновено означава, че заявката се прихваща от резервна система.
6. Системата работи в стационарен режим.
7. Времето за обслужване на всички заявки е еднакво разпределено с очакване  $1 / \mu$ , независимо от историята на системата, местоположението на заявката и номера на ОУ.

Всяко от ОУ може да бъде в едно от двете състояния: 0, съответстващо на *свободен*; и 1, съответстващо на *зает* с обслужване на заявка. Така системата има общо  $2^2$  състояния, както следва:

- 00: И двете ОУ са свободни
- 01: ОУ 1 е заето, ОУ 2 е свободно
- 10: ОУ 1 е свободно, ОУ 2 е заето
- 11: И двете ОУ са заети

Както се вижда, състоянието на ОУ  $n$  е зададено от  $n$ -тата цифра считано отлясно наляво в описанието, аналогично на бинарно число. Това правило остава в сила и при записване на системи от  $N$  сървъра, които имат  $2^N$  брой състояния.



Фигура 2

Диаграмата на състоянията за този процес е показана на Фигура 2. Докато вероятностите за състоянията в стационарен режим не зависят от точната форма на разпределението, ще се предполагат отрицателно-експоненциални разпределения за времената на обслужване, за да се построят по-прости уравнения.

1. Уравнение на състоянието 00

$$(1) P_{00}\lambda = (P_{01} + P_{10})\mu$$

2. Уравнение на състоянието 01

$$(2) P_{01}(\lambda + \mu) = P_{00}\lambda_1 + P_{11}\mu$$

3. Уравнение на състоянието 10

$$(3) P_{10}(\lambda + \mu) = P_{00}\lambda_2 + P_{11}\mu$$

4. Уравнение на състоянието 11

$$(4) P_{11}2\mu = P_{01}\lambda + P_{10}\lambda$$

5. Сума от вероятностите

$$(5) P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} = 1$$

Заместването на (4) в (1) води до

$$(6) P_{11} = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_{00}$$

Заместването на (6) в (2) дава съответно

$$P_{01} = \frac{P_{00}\lambda_1 + P_{11}}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda_1 + \lambda^2/2\mu}{\lambda + \mu} P_{00}$$

От симетричността се получава

$$P_{10} = \frac{\lambda_2 + \lambda^2/2\mu}{\lambda + \mu} P_{00}$$

Накрая, след заместване в (5.9) и някои преобразувания се получава:

$$P_{00} = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + \lambda^2/2\mu^2}$$

Може да се забележи, че изразът за вероятността  $P_{00}$  е същия както за вероятността  $P(S_0)$  в система M/M/2/0. Това е и очаквания резултат, тъй като разглежданата в момента система е просто M/M/2 система с различни сървъри и без места за чакане. Ако се положи  $\eta = \lambda/2\mu$ ,  $\eta_1 = \lambda_1/\mu$ ,  $\eta_2 = \lambda_2/\mu$ , за вероятностите се получават следните изрази:

$$P_{00} = \frac{1}{1 + 2\eta + 2\eta^2}$$

$$P_{01} = \frac{\eta_1 + 2\eta^2}{1 + 2\eta} P_{00}$$

$$P_{10} = \frac{\eta_2 + 2\eta^2}{1 + 2\eta} P_{00}$$

$$P_{11} = 2\eta^2 P_{00}$$

Нека се дефинира понятието *работно натоварване* на ОУ  $n$  като равномерно разпределена вероятност устройството да обслужва заявка, и да бъде обозначено с  $\rho_n$ . Ясно е, че тогава

$$\rho_1 = P_{01} + P_{11} = \frac{\eta_1 + 4\eta^2 + 4\eta^3}{1 + 2\eta} P_{00}$$

$$\rho_2 = P_{10} + P_{11} = \frac{\eta_2 + 4\eta^2 + 4\eta^3}{1 + 2\eta} P_{00}$$

Разликата между работните натоварвания  $\Delta\rho$ , което е мярка на степента кое ОУ е по-натоварено от другото, се получава

$$\Delta\rho = |\rho_1 - \rho_2| = \frac{P_{00}|\eta_1 - \eta_2|}{1 + 2\eta}$$

Друга величина представляваща интерес е  $f_{nj}$  – частта на обслужени заявки които отвеждат ОУ  $n$  в зона  $j$ . Тази “честота на междузонално обслужване” позволява да бъде изчислено математическото очакване на времената за пътуване.

Нека са дефинирани следните величини:

$T_n(C) \equiv$  средно време за пътуване на ОУ  $n$  до заявка възникнала в зона  $C$

$\bar{T}(C) =$  средно време за пътуване в системата, при допускането, че главна зона на обслужване на ОУ 1 е зона  $C$

Така например  $T_n(B)$  е средното време за пътуване ако пътуването за всяка обслужена заявка (от  $B$ ) е започнало от местоположение  $n$ . Ако зона  $A$  е главна зона за ОУ 1, средното време за пътуване на обслужените заявки може да се запише като

$$\bar{T}(A) = f_{11}T_1(A) + f_{22}T_2(B - A) + f_{12}T_1(B - A) + f_{21}T_2(A)$$

Получаването на стойностите за  $f_{nj}$  се извършва както следва: Разглежда се един достатъчно дълъг интервал от време  $T$ . При равномерно разпределение, общият брой на обслужените заявки е  $(1-P_{11})\lambda T$ ; средният брой на заявките отвеждащи ОУ 1 в зона 2 е равен на  $\lambda_2 T$  умножен по вероятността  $P_{10}$  ОУ 2 да е заето. Така, частта от обслужените заявки получени във времеинтервала  $T$  и отвеждащи ОУ 1 в неговата не-главна зона е

$$f_{12} = \frac{\lambda_2 T P_{10}}{(1 - P_{11})\lambda T} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{11})\lambda} P_{10}$$

Аналогично

$$f_{11} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{11})\lambda} (P_{00} + P_{10})$$

$$f_{22} = \frac{\lambda_2}{(1 - P_{11})\lambda} (P_{00} + P_{01})$$

$$f_{21} = \frac{\lambda_1}{(1 - P_{11})\lambda} P_{01}$$

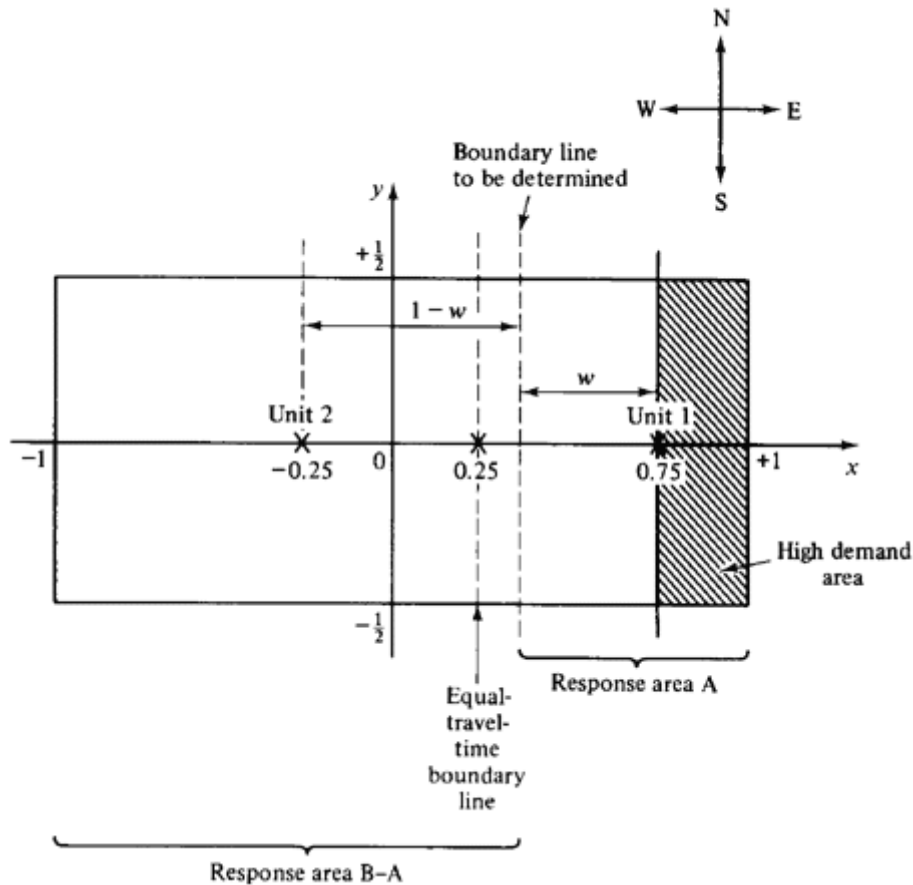
Замествайки последователно, за средното време на пътуване в системата се получава:

$$\begin{aligned} \bar{T}(A) = \frac{1}{1 - P_{11}} [P_{10}T_1(B) + P_{01}T_2(B)] \\ + \frac{P_{00}}{\lambda(1 - P_{11})} [\lambda_1 T_1(A) + \lambda_2 T_2(B - A)] \end{aligned}$$

Тази формула може да се използва за изчисление на средното време за пътуване за кои да е приети главни зони  $A$  и  $B-A$ .



**Пример: Нехомогенен правоъгълен град**



Фигура 3

Разглежда се правоъгълен град, показан схематично на Фигура 3. Градът има размери 2 километра изток-запад и един километър север-изток. Зададена е координатна система  $x$ - $y$  с начало геометричния център на града. Предполага се, че времето на пътуване е правопрпорционално на разстоянието; като разстоянието между кои да е две точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_j, y_j)$  се изчислява в метрика на Минковски, т.е.

$$d_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$$

Местоположението на депото за ОУ 1 е  $x_1 = +0.75, y_1 = 0.0$  а за ОУ 2 е  $x_2 = -0.25, y_2 = 0.0$ . Заявките за обслужване са *нееднакво* разпределени, като 50% от заявките са разпвределени равномерно в региона източно от депо 1 ( $x > 0.75$ ). Другата половина от заявките за обслужване са разпределени равномерно върху останалата част от града ( $x \leq 0.75$ ). Тъй като регионът с по-голяма необходимост от обслужване е заключен в координати  $(0.75 \leq x \leq 1.0)$ , депото 1 е разположено на

$x=0.75$ , за да бъде ОУ 1 в близост до него, и да не се губи твърде много време за пътуване. Средната интензивност на заявките в системата е  $\lambda=5/4$  времето за обслужване от ОУ; тъй като времето се измерва в единици “време за обслужване”, за простота се приема  $\mu=1$ .

Нека двете главни зони на действие на двете ОУ да се определят от гранична линия намираща се на разстояние  $w$  западно от депо 1 (и  $1-w$  източно от депо 2). Предполага се, че  $0 \leq w \leq 1$ . Заявките появяващи се на запад от граничната линия се назначават към ОУ2, ако то е свободно. Аналогично заявките появяващи се на изток от линията ще се прихванат от ОУ1, ако е свободно. Така множеството  $A$  съответства на  $\{(x, y) \in B: x \geq 0.75 - w\}$ , а множеството  $B - A$  съответства на  $\{(x, y) \in B: x < 0.75 - w\}$ . При изчисляване на времето за пътуване, ще се има предвид единствено пътуването в направление изток-запад, тъй като пътуването по направление север-юг (което е средно 0.25 километра за заявка) не зависи от  $w$ . За удобството да се работи директно с Фигура 3, без да се налага да се разделя на скоростта на пътуване, по-долу ще се разглеждат директно разстоянията на пътуване, вместо времената. Това е съвсем уместно, тъй като двете са линейно зависими. Все пак остава допускането, че скоростта е достатъчно голяма, за да бъде времето за обслужване определящо за общото време.

TABLE 5-3 Quantities related to travel times in the two-server example.

Unit 2	Unit 1
$\eta_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \lambda_2 = \frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{w}{7} \right)$	$\eta_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \lambda_1 = \frac{5}{8} \left( 1 + \frac{4w}{7} \right)$
$T_2(B) = \frac{11}{14}$	$T_1(B) = \frac{1}{2}$
$T_2(B - A) = \frac{1}{7} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{(1-w)^2}{7} \right]$	$T_1(A) = \frac{1}{1} + \frac{4w^2}{4w/7}$
$\rho_2 = \frac{4}{9 \cdot 97} (32\lambda_1 + 25) + \frac{25}{97}$	$\rho_1 = \frac{4}{9 \cdot 97} (32\lambda_2 + 25) + \frac{25}{97}$
<i>General Quantities of Interest</i>	
$\rho_{00} = \frac{32}{97}, \rho_{10} = \frac{4}{9 \cdot 97} (32\lambda_2 + 25), \rho_{01} = \frac{4}{9 \cdot 97} (32\lambda_1 + 25), \rho_{11} = \frac{25}{97}$	

In this table  $T_1( )$  and  $T_2( )$  are given terms of travel distances.

Използвайки основните формули дадени по-горе, се получават изразите за  $\rho_n, T_n(B), T_1(A)$ , и  $T_2(B - A)$  като функция на  $w$  (виж ТАБЛИЦА). Както беше посочено, формулите за времената на пътуване представляват в случая *разстояние* на пътуване. Тези функции имат поведението което се очаква. Например,  $\eta_1 = \lambda_1$ ,

нараства линейно с  $w$ , докато  $\eta_2 = \lambda_2$ , намалява линейно с  $w$ . Средните времена за обслужване са нелинейни функции на  $w$ , с две гранични условия ( $w = 0$  и  $w = 1$ ) проверявани по интуиция. Както може да се очаква,  $T_2(B) = 11/14$  е по-голямо от  $T_1(B) = 1/2$  тъй като депо 2 е разположено сравнително далече от региона с по-голяма необходимост от обслужване,  $0.75 \leq x \leq 1.0$ .

**Еквивремена гранична линия на пътуване.** Най-очевидното разделяне на града на две главни зони за обслужване би било задаването на  $w$  стойност  $1/2$ , еквиливанта от депо 1 и депо 2, задаваща зони на обслужване  $A_{w=1/2}$  и  $B - A_{w=1/2}$ . С подобно разделяне, заявките се прихващат от най-близкия свободен сървър, минимизирайки така “непосредствените разходи по заявката”, като стойността се измерва в средно време за пътуване. Би могло да се предположи, че такава политика ще минимизира и общото време за пътуване в цялата система. Замествайки всички числени стойности описващи проблема в (5.17), за средното време на пътуване в системата получаваме:

$$\bar{T}(A_{w=1/2}) = 0.46246$$

Съответните работни натоварвания са

$$\rho_1 = 0.49010$$

$$\rho_2 = 0.43773$$

даващи работен дисбаланс

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0.05236$$

**Алтернативна гранична линия.** Дали наистина  $w = 1/2$  води до минимално време за пътуване в системата може да се провери чрез диференциране  $\bar{T}$  спрямо  $w$ . Решаването на уравнението  $d\bar{T}/dw = 0$  според анализа ще даде оптималната стойност на  $w$ , даваща минималното общо средно време. (Не бива да се забравят границите  $0 < w < 1$  и да се направи проверка  $d^2\bar{T}/dw^2 > 0$ , гарантираща получаването на минимум вместо максимум).

Диференцирането е директно тъй като  $w$  присъства в  $T$  само като събираемо във формите  $k_1w$  and  $k_2w^2$ . Заместването на уравненията в ТАБЛИЦА 5-3 в (5.17) води до

$$d\bar{T}/dw = 0 = w - 53/126$$

указващо, че оптималната стойност за  $w$ , записвано като  $w^*$ , е

$$w^* = 53/126 < 1/2$$

Зоната на обслужване, сега отбелязвана като  $A_w^*$ , е изместила своята западна граница надясно от екви-времева линия на пътуване с  $10/126 = 0.0794$  километра. В “измествения” регион, намиращ се в граници  $1/2 \leq w \leq 53/126$ , новите състояния са че ако ОУ1 поеме заявката вместо ОУ2, непосредствените спестявания от изпращането на по-близкия сървър (ОУ1) не са достатъчно големи за да компенсират вероятността друга заявка да наложи дълго пътуване на ОУ2 (например в зоната с по-висока необходимост от обслужване), поради заетостта на ОУ1. Това означава, че минималното време за пътуване в системата се получава при сценарий на работа налагащ понякога малко по-голямо време за пътуване от минималното възможно в момента, с цел да бъде оставена системата в състояние което най-добре да посрещне бъдещи заявки за обслужване. Това е фундаментално свойство на много стохастични системи: *При избирането алтернатива на решение по всяко време, често оптимално е да се избере алтернатива която няма най-малките непосредствени разходи (или максималната непосредствена печалба) с цел да се осигурят най-добрите бъдещи състояния и възможност за алтернативи на избор*<sup>1</sup>.

Интересно е какви спестявания в средно време на пътуване се получават в този случай при следване на политика на оптимална граница. Резултатът е

$$\bar{T}(A_w^*) = 0.46166$$

или само 0.173% по-малко от екви-дистантната граница. Резултатът е в съгласие с други анализи на пространствено разпределени вероятностни системи, които показват че средното време за пътуване е твърде нечувствително на малки промени в границите на системата. Учудващото в промяната на границата е

---

<sup>1</sup> В оригинал: *In selecting a decision alternative at any given time, it is often optimal to select an alternative that does not yield the minimum possible immediate cost (or the maximum possible immediate reward) in order to facilitate the most favorable future system states and decision alternatives.*

ефектът върху работния дисбаланс. С  $w = w^* = 53/126$  за работното натоварване се получава

$$\rho_1 = 0.44189$$

$$\rho_2 = 0.48594$$

ведещ до работен дисбаланс от 0.04405, сравнен с по-раншната стойност от 0.05236, подобрението е 15.87%. Така чрез дизайн на система с минимизиран един критерий на производителност, се получи подобрение на друг критерий. Това е необичайно в изследването на операции, където обикновено се среща конфронтация на интереси и един критерий на производителност трябва да се намали, за сметка увеличението на друг. В приложна насока, Картър, Чайкен и Игнал, които първоначално анализират двусървърния модел, и по-късно Джарвис който развива идеите за  $N$  сървъра, използват често изведените процедури за минимизиране на средното време за пътуване главно за да получат редукция на работния дисбаланс. Така се поражда ситуация в която алгоритмите и процедурите изработвани за оптимизирането на даден параметър се използват в практиката за подобрение на друг.

### **Оптимално разделяне**

Картър, Чайкен и Игнал са обобщили идеите илюстриране в предишния пример. Те са извели оптималното разделяне на проезволен двусървърен регион, позволяващ произволно пространствено разпределение на заявки за обслужване и произволна функция на пътуване. Оптималността съдържа минимизация на средното време на пътуване в системата. *Оптималното разделяне се състои от множество от точки в региона до които времената за пътуване от депо 1 и депо 2 се различават с константа*<sup>2</sup>. Константата, бележеща се с  $s_0$ , показва големината с която депо 1 е по-близо (в смисъл на време за пътуване) от депо 2 до коя да е точка от границата. Например, ако константата е 30 секунди, разделителната “граница” е множеството от точки в региона за които пътуването

---

<sup>2</sup> При известни редки обстоятелства, това множество от точки има положителна площ. В тези случаи оптималното разделяне не е уникално, и всяко разделяне съдържащо се напълно в това множество е оптимално.

от депо 1 до точка от границата ще отнеме 30 секунди по-малко отколкото от депо 2 до същата точка. Нека се предположи, че времето на пътуване варира линейно с разстоянието на пътуване, както в повечето случаи. Тогава  $s_0/2$  е времето за пътуване с което оптималната граница е отместена от еквивремевата граница на пътуване. Делението на 2 присъства поради това, че преместванета на границата на 1 секунда време за пътуване по-близо до депо 1 води и до отдалечаването на 1 секунда пътуване от депо 2, така 1 секунда преместване създава 2 секунди разлика между времената на пътуване. В горния двусървърен пример, произволна точка от оптималната граница (намираща се на  $x = 0.25 + 10/25$ ) е  $s_0 = 2(1/2 - 53/126) = 20/126 = 10/63 \approx 0.1587$  километра по-близо до депо 1 отколкото до депо 2.

Картър, Чайкен и Игнал доказват, че оптималната стойност за  $s_0$  се получава от простата формула

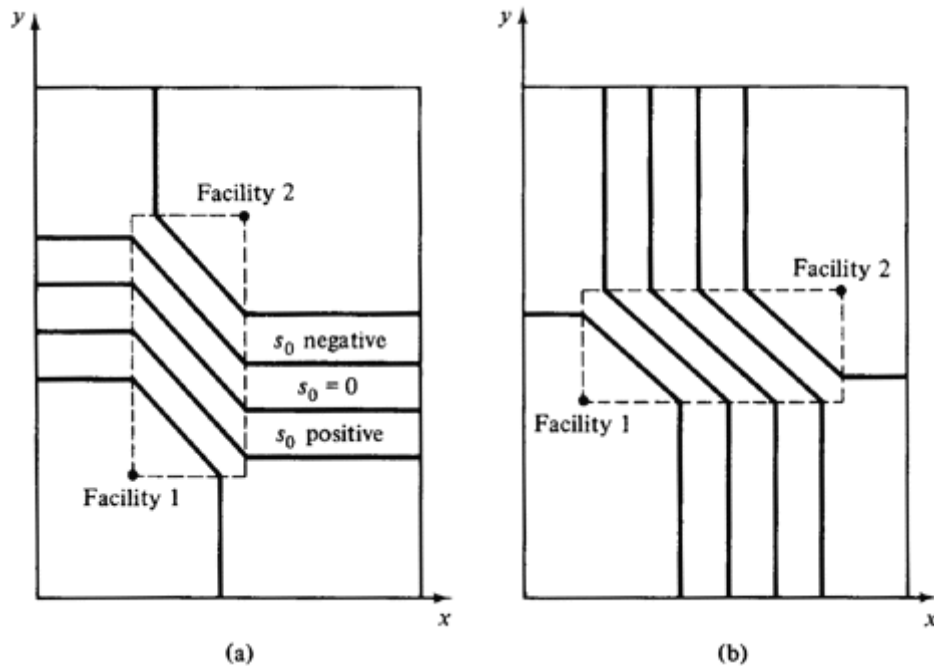
$$s_0 = \frac{2\eta}{2\eta + 1}(T_2(B) - T_1(B))$$

където  $\eta$ ,  $T_1(B)$ , и  $T_2(B)$  са дефинирани както в горния пример [3]. Трябва да се подчертае, че този резултат е напълно общ: той е приложим за нехомогенни региони, с произволна форма, в които времето за пътуване може да се изчислява съгласно евклидова или правоъгълна метрика, или пътуването да е още по-усложнено от прекъсвания от бариери и еднопосочни улици.

### **Местоположение на депото**

Ларсън и Стивънсън, в разработка паралелна на тази на Картър, Чайкен и Игнал, използват частен случай на двусървърен модел за да изследват някои въпроси относно оптималното разположение на обслужващите центрове (депата) [4]. В частност, те разглеждат правоъгълен регион с размери  $n \times m$ , в който заявките са равномерно разпределени и депо 1 се намира на координати  $(x_1, y_1)$ . Един от въпросите е да се постави депо 2 на някакво местоположение  $(x_2, y_2)$  и да се определят оптималните зони на обслужване. Тази ситуация съответства на практическия проблем, при който съществуващото депо обслужващо региона е пренатоварено и трябва да се открие нов обслужващ център. Задачата е да се определи местоположението на новото депо и регионът да се раздели така, че

полученото средно време за пътуване да е минимално. Подобен проблем при разглеждане на мрежи е т.нар. "*p*-median" проблем.



Фигура 4

Предполага се, че времето за пътуване се изчислява в правоъгълна метрика, като направленията на пътуване са успоредни на страните на правоъгълника. Първата задача е да се определи променливата  $s_0$  определяща евентуалните гранични линии. Прилагайки правилото на Картър-Чайкен-Игнал в този случай оптималната граница се състои от точки  $(x, y)$  удовлетворяващи уравнението

$$|x_1 - x| + |y_1 - y| + s_0/2 = |x_2 - x| + |y_2 - y| - s_0/2$$

където  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  са координатите на съответните депа. Уравнение (5.19) задава семейство граници, от тип 1 или тип 2, показани на Фигура 4. За всяка произволна двойка координати  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , съществуват две стойности за  $s_0$  които не определят еднозначни граници, а региони в които всички точки са  $s_0$  по-близо до едното депо отколкото до другото. Всяко произволно (линейно) разделяне  $B$  съдържащо се в такъв регион е оптимална граница.

Средното време на пътуване в системата в по-общ случай, може да бъде изчислено чрез прилагане на идеите на Ларсън и Одони описани в [5] точки 3.4.1 и 3.8. В частност, за система с ниско натоварване, в която честотата на изпращане на едно ОУ извън неговата главна зона на обслужване е пренебрежимо малка, оптималната граница е еквивремевата граница на пътуване (т.е.,  $s_o = 0$ ). Нека депо 2 да се намира на север-североизток спрямо депо 1:

$$\begin{aligned}x_2 &\geq x_1 \\y_2 &\geq y_1 \\y_2 - y_1 &\geq x_2 - x_1\end{aligned}$$

което е показаният на Фигура 4 тип 1 разделяне. След това, чрез последователно разделяне на правоъгълни и триъгълни подрегиони за средното време на пътуване в системата се получава

$$\begin{aligned}\bar{T}(A_{s_o=0}) &= \frac{1}{nm}(-\frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{1}{2}x_1^2y_1 + \frac{1}{2}x_1^2y_2 \\&\quad - \frac{1}{2}x_2^2y_2 - \frac{1}{2}x_2^2y_1 + \frac{3}{4}y_1^2n + \frac{3}{4}y_2^2n - \frac{1}{2}y_1x_1n - \frac{1}{2}y_1y_2n \\&\quad - \frac{1}{2}y_2nx_1 + \frac{1}{2}ny_1x_2 - \frac{1}{4}x_1^2n + \frac{1}{2}nx_2y_2 + \frac{1}{2}x_1x_2n \\&\quad - \frac{1}{4}x_2^2n + \frac{1}{2}n^2m - nm x_2 + \frac{1}{2}nm^2 - nmy_2 + x_2^2m)\end{aligned}$$

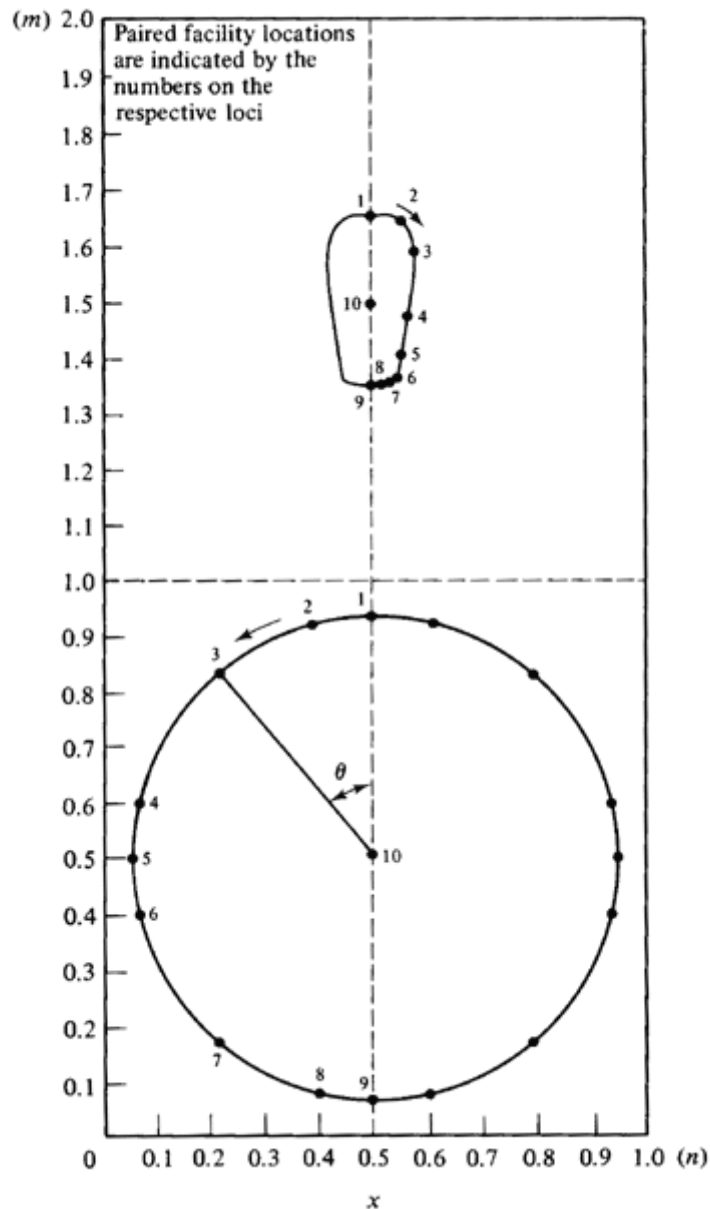
За всяка от останалите седем възможни ситуации на разположение на депата едно спрямо друго, изразът за  $\bar{T}(A_{s_o=0})$  може да се получи чрез директно преименуване на координатите.

За случая  $\eta = \lambda/2\mu \approx 0$ , имайки предвид че  $s_o = 0$ , оптималното позициониране за депо 2, при дадено местоположение на депо 1, може да се получи чрез диференциални изчисления. За случаите в които  $\eta > 0$ , като  $s_o \neq 0$ , изразите за частните производни на  $\bar{T}(A_{s_o})$  стават твърде трудни за да бъдат решени, затова се използва градиентна процедура за получаване на оптимални стойности за  $(x_2, y_2)$ .

За да се демонстрират практическите свойства на резултатите, ще бъде разгледан като пример регион за които  $n = 1, m = 2$ . Позицията на депо 1 се променя непрекъснато по затворена траектория в южната половина на региона. При това се изследва движението на оптималните местоположения на депо 2, породено от промяната в системата.



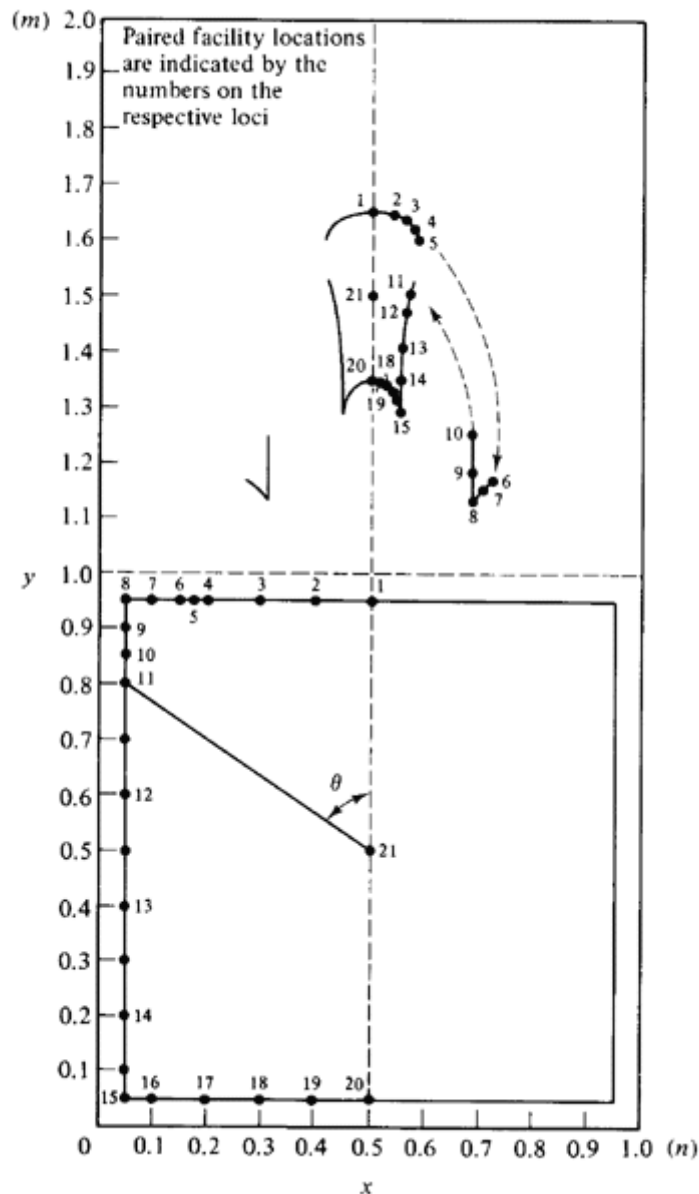
На Фигура 5 се вижда ефекта от промяната на позицията на депо 1 по кръгообразна траектория с център (0.5, 0.5) и радиус 0.45. Най-неочакваната характеристика която се вижда веднага от фигурата е, че за големи промени на местоположението на депо 1, промяната в позицията на депо 2 запазваща оптималността е сравнително малка.



Фигура 5

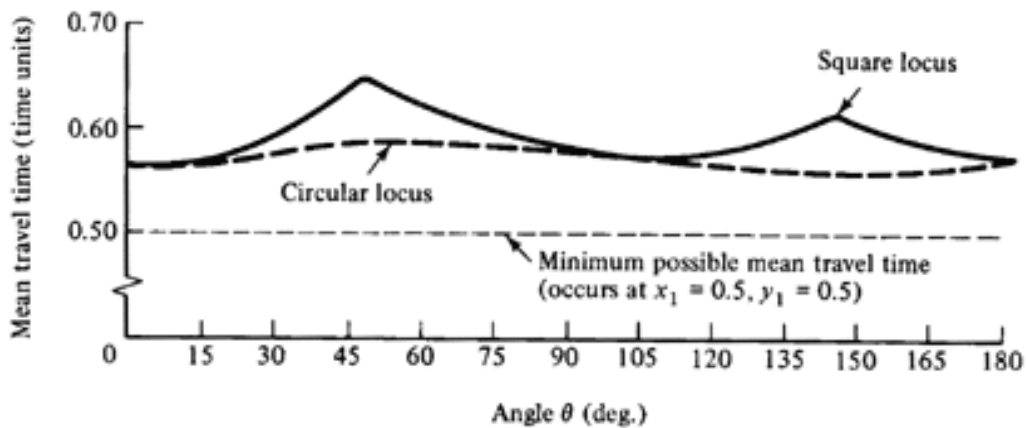
Друго което се забелязва, е че непрекъснатата траектория на позициите на депо 1 поражда *прекъсната* траектория от оптимални позиции на сървър 2, като прекъсванията се намират на местата където оптималната гранична конфигурация

се променя, например, от тип 1 на тип 2. Средното време на пътуване все пак се изменя непрекъснато. Споменатият ефект се вижда ясно на ФИГ 5.5, където позицията на депо 1 се придвижва по страните на квадрат с център (0.5, 0.5) и страна 0.9, пораждащо прекъсната траектория на оптимални позиции на депо 2. Вижда се, че за позиции на депо 1 близо до върховете на квадрата, оптималните местоположения на депо 2 прескачат в регион за които е необходимо разделяне на зоните от тип 2 (вместо тип 1).



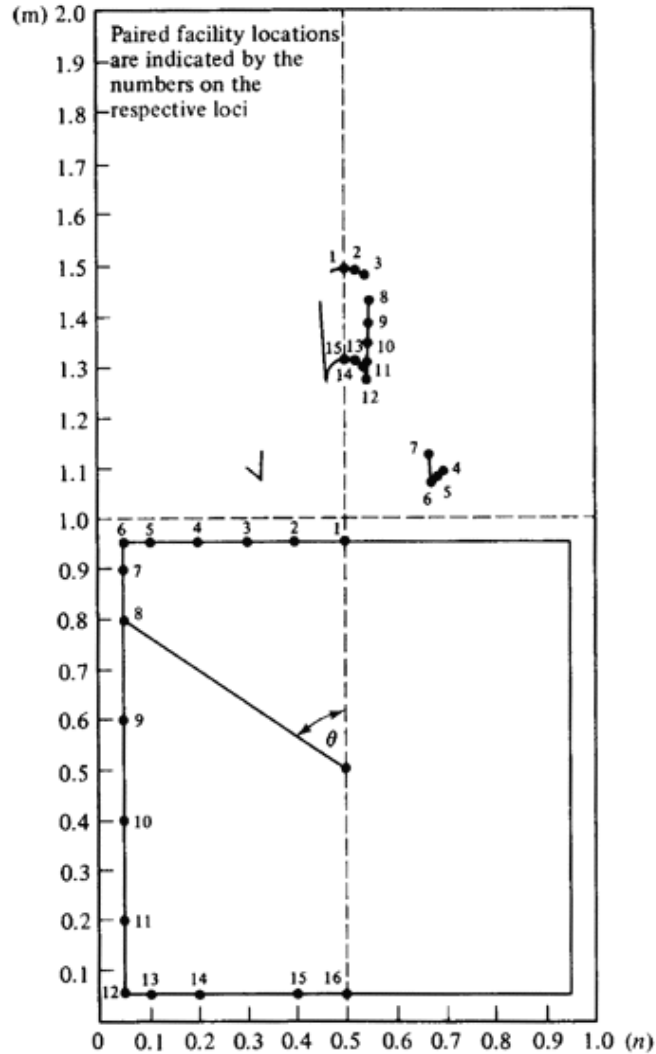
Фигура 6

Съответстващите средни времена на пътуване на двете траектории за депо 1 (показани на Фигура 5 и Фигура 6) са показани на Фигура 7, при оптимална позиция на депо 2. Графиката показва  $\bar{T}$  като функция на  $\theta$ , ъгълът дефиниран от точка (0.5, 0.5) до позицията на депо 1 (Поради симетрията на позициите на депо 1 за  $x=0.5$ , показани са стойностите на  $\bar{T}$  само за  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ). За кръгообразната траектория,  $\bar{T}$  варира между  $\bar{T} \simeq 0.56$  ( $\theta \simeq 140^\circ$ ) и  $\bar{T} \simeq 0.59$  ( $\theta \simeq 65^\circ$ ). За квадратната траектория, максималната стойност на  $\bar{T}$  е около 0.65 ( $\theta \simeq 45^\circ$ ), а минималната приблизително 0.57 ( $\theta \simeq 0^\circ$  или  $180^\circ$ ). Вземайки предвид мащаба на траекториите на депо 1 се оказва, че  $\bar{T}$  не се влияе силно от позицията му.



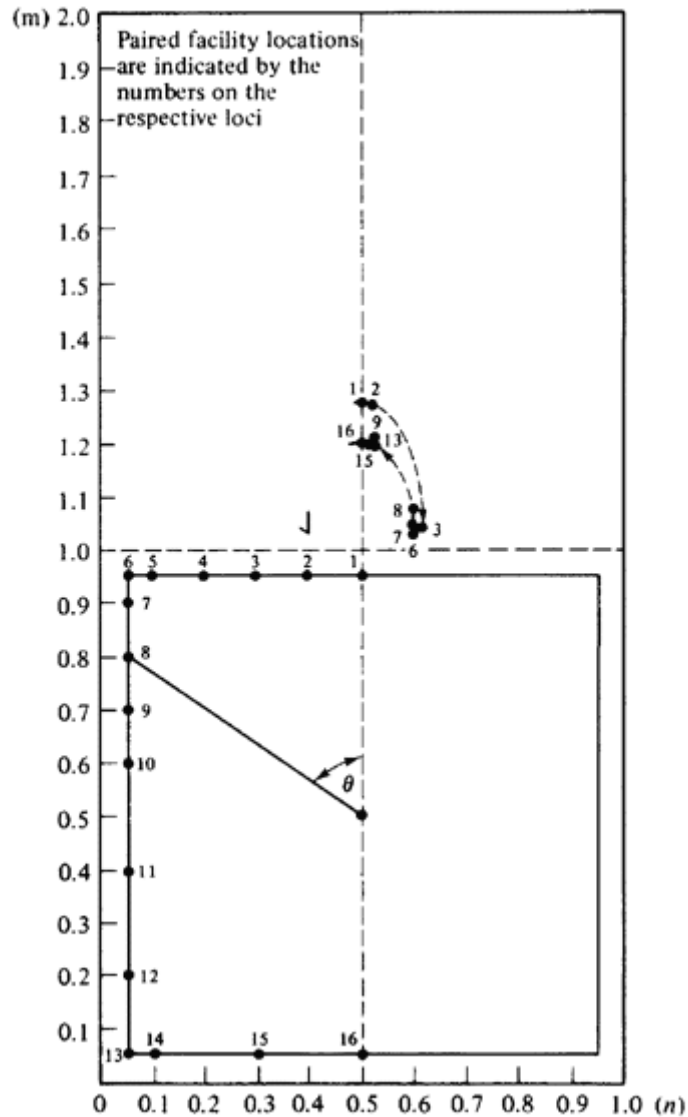
Фигура 7

Следващо нещо представляващо интерес е промяната на оптималната траектория за депо 2 когато  $\eta$ , мярка за нивото на заявките в системата, се увеличи над нула. Интуитивно би могло да се очаква, че при увеличаване на  $\eta$ , оптималната траектория на сървър 2 ще се измести южно с цел за по-добро прихващане на заявките от южната половина на региона, ако ОУ 1 е заето при постъпването на заявката.



Фигура 8

За  $\eta = 0.2$  от Фигура 8 се забелязва същата прекъснатост наблюдавана на Фигура 6 на позицията на  $(x_0^2, y_0^2)$  когато  $(x_1, y_1)$  следва квадратна траектория. В добавка, оптималната позиция на депо 2 дори още по-малко се влияе от позицията на депо 1, отколкото при  $\eta \simeq 0.0$ ; а локусът на оптималните позиции се е преместил надолу.



Фигура 9

Последните две наблюдения са валидни още повече за  $\eta \simeq 1.0$  (Фигура 9). Както се вижда, при увеличаване на  $\eta$ , оптималната позиция на депо 2 става по-малко чувствително към местоположението на депо 1 и се приближава и за двата типа разделяне (тип 1 и тип 2) към точката (0.5, 1.0). Този феномен може да бъде разбран интуитивно както следва: При увеличаване на  $q$  (забел. може би се има предвид  $\eta$ ?), вероятността  $P_{00}$ , че и двете ОУ ще бъдат свободни едновременно намалява към нула. За големи стойности на  $\eta$ , приблизително всички прихващания на заявки се правят от единственото свободно ОУ, докато другият сървър все още е зает с обслужване на предишна заявка. Така пространствено разпределените заявки за обслужване за които се определя всяко от двете ОУ

стават еднообразни по целия регион<sup>3</sup>. Ясно е, че оптималната позиция на сървър, чиито заявки за обслужване са равномерно разпределени в целия регион, е центъра на региона (0.5, 1.0). От тук, за големи стойности на  $\eta$ , оптималната позиция на депо 2 е близо до центъра на региона, независимо от местоположението на депо 1. Наистина, ако е позволено да се избере позиция на депо 1, неговото оптимално положение също ще бъде близо до центъра на правоъгълника (0.5, 1.0).

Разгледаният в тази точка модел е разширен към  $N$  сървъра [5] и допълнен с дисциплини на припокриване които задоволяват конкретни разглеждания. Формулите дадени тук са основа и за други насоки на размисъл, както е посочено в заключението по-долу.

---

<sup>3</sup> В оригинал: Thus, the spatial distributions of service requests to which each service unit is assigned become uniform over the entire region.

## Диаграма на Вороной

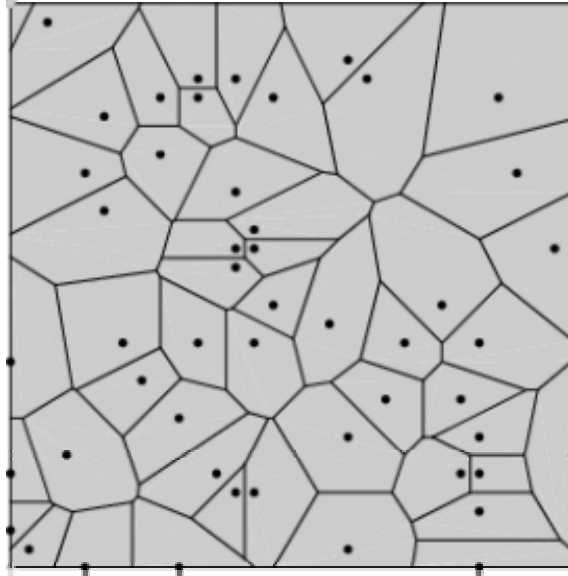
Задачите за пространствени опашки се решават върху модел описващ геометрията на системата в която се появяват заявките за обслужване. Характеристиките които моделът наследява от реалната система са метриката за определяне на разстояния, плътността на потенциалните клиенти (вероятностите за появяване), както и евентуални ограничения за разполагане или движение в пространството. Тези характеристики имат силно влияние върху задачите за разполагане и определяне зони на действие на сървъри. При чисто геометрично разглеждане, в постановката на задачата може да се сведе доста априорна информация, която да послужи като отправна точка при решаването на логистичната задача.

Един от способите за синтезиране на такава информация е широко използваната в много области *диаграма на Вороной*. Често математическата дефиниция на този инструмент е следната:

Нека е дадена равнина съдържаща  $n$  несъвпадащи точки, които само за удобство ще наречем *централни*. *Диаграма на Вороной (Voronoi diagram)* се нарича разделянето на равнината на  $n$  изпъкнали полигони (англ. *polygons*) такива, че всеки полигон съдържа точно една централна точка и всяка произволна точка от даден полигон е по-близо до централната точка лежаща в същия полигон отколкото до която и да е друга централна точка. Диаграмата на Вороной е позната още и като *Мозайка на Дирихле (Dirichlet tessellation)*.

Полигоните образуващи диаграмата се наричат *Региони на Дирихле (Dirichlet regions)*, *Политопи на Тисен (Thiessen polytopes)*, или *Полигони на Вороной (Voronoi polygons)*. В контекст отнасящ се до диаграма на Вороной названията *полигон*, *многоъгълник*, *клетка* и *регион* са синоними.

На ФИГ може да бъде видяна примерна диаграма на Вороной.



От дефиницията следва, че точките лежащи на границата между два полигона са на еднакво разстояние от двете им централни точки. Пресечната точка на две (или повече) граници е равноотдалечена от централните точки на всички полигони ограничени от тези граници.

Диаграмите на Вороной намират широко приложение в редица области които изследват връзката между точки в равнината и област на тяхното действие: Химия (изследване поведението на атоми във флуид), Биология (разпространение на ракови клетки в тялото), Астрономия (гравитационни полета на космически обекти) и др.

В областта на Логистиката диаграмите на Вороной също могат успешно да се приложат, и то не само косвено. По-конкретно, в задачите за пространствени опашки те могат да намерят директно приложение. В задача за определяне зона на действие на сървъри с известно местоположение, при сценарий на опашката «обслужване от най-близък сървър», от дефиницията следва, че диаграмата на Вороной е решение на задачата. Още повече, диаграмата не поставя ограничение върху метриката на системата.

В различните сфери дадената тук най-проста форма на диаграмите е допълнена и пригодена към по-частните случаи на изследване, специфични за разглежданите задачи. Така например на централните точки могат да се разглеждат като окръжности с определен (и незадължително еднакъв за всички) радиус, които окръжности следва изцяло да лежат в съответния полигон.

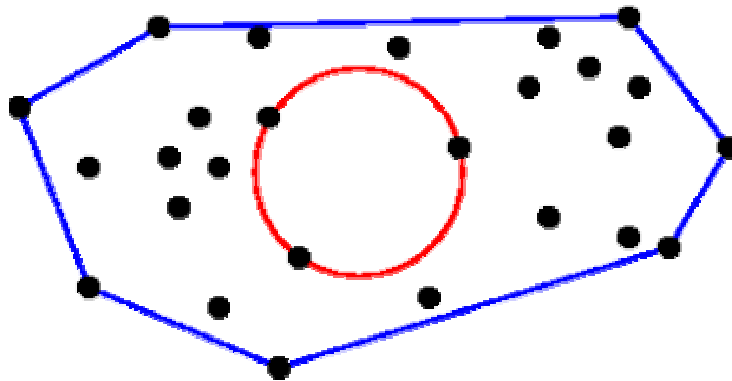


Съществуват различни методи за създаване диаграми на Вороной. Основните от тях са познати като *инкрементален метод*, *плъзгач (sweep) метод*, и метод *разделяй и владей*. Естествено всяка по-различна формулировка на задачата изисква модификация на методите, затова на практика не могат да бъдат изброени всички.

### **Пример за приложение: Най-голяма празна окръжност**

Диаграмите на Вороной са ценни и с това, че предлагат по-добри методи за решаване и на вече решени задачи, включително и такава, представляващи интерес за логистиката. Пример за това е следната задача:

При зададени  $n$  точки в равнината, да се намери най-голямата окръжност не съдържаща коя да е от дадените точки и чийто център е вътрешен за обвиващия многоъгълник на множеството точки.



По-ранно решение на тази задача е алгоритъм чието време за решаване в най-лошия случай е  $O(n^3)$ . Препарата и Схомос показват, че проблема може да бъде решен за време  $O(n \log n)$  с помощта на диаграме на Вороной. Решението  $O(n \log n)$  е оптимално за тази задача.

В приложен аспект, този алгоритъм посочва най-голямото разстояние което трябва да се измени в една СМО (от клиента до сървъра) или система с пространствени опашки.(от сървъра до клиента). Това е подзадача както и на анализа на една система, така и в задача за внедряване на ново обслужващо устройство. В последната, при пренебрегването на други условия, оптималното място за поставяне на новото ОУ е центърът именно на най-голямата празна окръжност.

## Модел РН/РН/1

При непоасонов процес е трудно да се предвидят резултатите за общия случай. По тази причина, ако поасоновия процес не е добро приближение необходимо е намирането или на нов вид разпределение което да представя процеса, или разпределение което да трансформира наблюдаваното разсейване на данните до вече познато. Може би едно от решенията е използването на фазо-типно разпределение което да преобразува разпределението до експоненциално.

Фазо-типните разпределения на времена на обслужване могат да се породят, ако например обслужването на заявката изисква изпълнението на няколко задачи, като всяка от задачите заема експоненциално разпределено количество време. За яснота, нека приемем, че има  $m$  различни типа  $\{ 1, \dots, m \}$  задачи които трябва да се изпълнят за да бъде завършено обслужването. Нека първата от задачите е тип  $j$  с вероятност  $\alpha_j, j=1, \dots, m$ . Времето за изпълнение на задачата има експоненциално разпределение с математическо очакване  $1/\mu_j, j=1, \dots, m$ . След изпълнението на задачата  $j$ , заявката може да се нуждае от изпълнението на задача  $i$ , с вероятност  $p_{ji}, i=1, \dots, m$  или да е приключила обслужването си и да напусне системата с вероятност  $\sum_{i=1}^m p_{ji}, j=1, \dots, m$ . Нека обслужването на заявката да започва във време  $0$  и  $X(t)$  да е вида задача изпълнявана в момента  $t$ , ако заявката все още е в процес на обслужване; и  $X(t)=m+1$ , ако заявката в този момент вече е обслужена. Тогава  $\{X(t), t \geq 0\}$  е непрекъснат процес на Марков с безкрайно малка генераторна матрица  $Q$ , където

$$Q = \begin{bmatrix} T & -T\{e\} \\ \{0\} & 0 \end{bmatrix}$$

$T$  е  $m \times m$  матрица с  $T_{ij} = \mu_i p_{ij}, j \neq i = 1, \dots, m$ ;  $T_{ii} = -\mu_i + \mu_i p_{ii}, i = 1, \dots, m$  и  $\{e\} = (1, \dots, 1)'$  е вектор-колона от единици. Началното вероятностно разпределение  $X(0)$  е  $(\alpha, 0)$  (т.е.  $P\{X(0) = i\} = \alpha_i, i = 1, \dots, m$ ). Състоянието  $m+1$ , е абсорбиращо състояние за  $\{X(t), t \geq 0\}$ , а времето за обслужване на заявка  $S$  е времето за което  $X(t)$  достига абсорбиращото състояние  $m+1$ ; това значи  $S = \inf\{t : X(t) = m+1, t \geq 0\}$ . Тъй като от теорията за процеси на Марков  $P\{X(t) = j\} = [\alpha e^{Tt}]_j, j = 1, \dots, m; t \geq 0$ , то е ясно че

$$P\{S > x\} = \sum_{j=1}^m P\{X(x) = j\} = \alpha e^{-Tt} \{e\}, x \geq 0.$$

Следователно функцията на разпределение на S е

$$F_s(x) = 1 - \alpha e^{-Tt} \{e\}, x \geq 0$$

а плътността на разпределение е

$$f_s(x) = \alpha e^{-Tt} (-T \{e\}), x \geq 0.$$

Както се вижда фазо-типното разпределение е напълно определено от  $(\alpha, T)$ , и отгук двойката се нарича репрезентация на  $F_s, f_s$  или  $S$ . От формулите дотук може да се докаже, че

$$E[S] = -\alpha T^{-1} \{e\}$$

Дори ако такива подзадачи не е явно видимо, ако фазо-типното разпределение добре представя времената на обслужване или появяване на заявки, може да се приеме съществуването на виртуални подзадачи и да се използват за моделиране на съответните времена в процес на Марков. Справки за процедурите на получаване на репрезентацията  $(\alpha, T)$  за фазо-типно разпределение може да бъде намерена в [2].

Нека разпределенията на времената за постъпване на заявки и времената на обслужване са представени съответно чрез  $(\alpha, A)$  и  $(\beta, B)$ . Следователно интензивността на постъпване  $\lambda$  е равна на  $(-\alpha A^{-1} \{e\})^{-1}$ , а интензивността на обслужване  $\mu$  на  $(-\beta B^{-1} \{e\})^{-1}$ . Тогава стационарността на системата, а от там и ограниченото на броя заявки в нея, се гарантира от условието:

$$-\alpha A^{-1} \{e\} > -\beta B^{-1} \{e\}$$

Фазо-типните разпределения могат да намерят приложение при разглеждане на процеси протичащи в градски условия. Различни процеси на обслужване съдържат в себе си изпълнението на една или повече от предварително известно крайно множество подзадачи. Например при изпращането на пътна помощ до аварирал клиент това може да бъде множеството:

1. запознаване с държанието на автомобила преди аварията
2. диагностика
3. смяна на масло
4. смяна на гума (една или повече)
5. поправка на електроника

6. поправка на механична повреда
7. подготовка за буксир
8. попълване документи

Това примерно множество съдържа в себе си подзадачи които са в различни релации по между си. Ако се разглежда обслужването на една заявка, в нея със сигурност фигурира поне една от подзадачи 1 и 2, една или повече от подзадачи 3 до 7, (като подзадача 4 може да присъства повече от веднъж) и подзадача 8.

Аналогичен разбор може да бъде направен и за обслужване от медицинска помощ, пожарна, полицейски патрул и пр. За създаването на ефективен модел базиран на фазо-типно разпределение, разбира се необходима е предварителна статистическа информация.

## Заклучение

Сведената информация в този проект не изчерпва текущото равнище на изследвания по темата «Пространствени опашки». Тук само бяха представени основните видове задачи спадащи към една и съща постановка: Местоположение на сървърите, Област на действие на сървъри, Изследване натоварването на сървъри, Сценарии на обслужване, Сценарии на припокриване и др.

Обекти на бъдещо изследване са системи в които може да се намери аналогия на постановката – контейнерни терминали или големи по площ складови бази където зоната на складиране е от голям мащаб, или по-малки складови пространства с аналогични процеси.

Естествено е търсенето на по-обща формули и подобряването на съществуващите такива за по-точно описание на проблемите. Също интерес представляват тримерните модели на пространствена опашка които имат смисъл в някои системи. Интересно е и по-близкото изследване поведението на пространствените опашки (изведените до момента формули и изводи) в различна геометрия, например полярна.

В заключение трябва да бъде отбелязано, че пространствените опашки са сравнително нов поглед на вече решавани проблеми, и тепърва ще представляват задълбочен интерес на изследване.

## Забележка

Точките Употреба на модела M/G/1 и Модел с две обслужващи устройства, без места за чакане са превод от [5] глава 5.

## Използвана литература

- [1] Петков Петко, “Записки по история на новото време” част 2, ИК “Свят-Наука” 1993, ISBN 954-8223-04-X
- [2] Buzacott, John A., Shanthikumar, J. George, “Stochastic models of manufacturing systems”, Prentice Hall, ISBN 0-13-847567-9
- [3] Carter, G.M., J.M. Chaiken, and E. Ignall, "Response Areas for Two Emergency Units," *Operations Research*, 20, 571-594 (1972).
- [4] Larson, R.C., and K.A. Stevenson, "On Insensitivities in Urban Redistricting and Facility Location," *Operations Research*, 20, 595-612 (1972).
- [5] Larson, Richard C., and Odoni Amedeo R.i, “Urban Operations Research”, Prentice-Hall, NJ, © 1981
- [6] Odoni, A.R., "An Analytical Investigation of Air Traffic in the Vicinity of Terminal Areas", Ph.D. dissertation (unpublished), Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1969.
- [7] [http://web.mit.edu/urban\\_or\\_book/www/book/index.html](http://web.mit.edu/urban_or_book/www/book/index.html), Електронна публикация на [5] 1998

## Литература свързана с въпроса

- [8] Kolesar, P., "A Model for Predicting Average Fire Engine Travel Times," *Operations Research*, 23 (4), 603-613 (July-August 1975). (note: Contains some empiric formulas for calculating travel times depending on the road type)
- [9] Lothar Breuer, “Spatial Queues”, PhD Thesis, University of Trier, 1999

## Полезни връзки / допълнителни източници

<http://mathworld.wolfram.com/VoronoiDiagram.html>

<http://www.csie.ntu.edu.tw/~b5506061/voronoi/Voronoi.html>

<http://www.voronoi.com>

<http://www2.uwindsor.ca/~hlynka/qonline.html>

<http://www2.uwindsor.ca/~hlynka/qbook.html>